PRELEGEREA 6
STATICA STRUCTRILOR CONTINUE
TIP PERETE STRUCTURAL

6.1 Elemente şi ansambluri structurale

6.1.1 Parametri proprii şi structurali

Structuri modelabile cu elemente finite şaibă triunghiulară

Elementul finit şaibă triunghiulară, construit artificial (aflat într-o anumită stare, de tensiune sau deformare), este de grosime constantă *t*, având modulul de elasticitate constant *E* şi coeficientul lui Poisson *ν*, la care deplasările extremităţilor şi forţele corespunzătoare se manifestă în planul median al acestuia (figura 6.1).

Pentru studiul deformării elastice a elementului finit şaibă triunghiulară se definesc parametrii proprii, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 raportaţi la reperul propriu reprezentat prin axele ortogonale *x* şi *y*, dispuse în planul median al acestuia, posibil, cu originea în extremitatea *1* (figura 6.1).

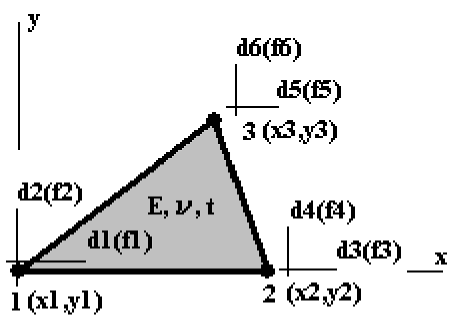


Figura 6.1 Element finit şaibă triunghiulară în sistemul de axe propriu *xy*

Ecuaţia de echilibru static a elementului finit şaibă triunghiulară este dată de relaţiile 6.1.1

$$\begin{bmatrix} ke_{1,1} & ke_{1,2} & ke_{1,3} & ke_{1,4} & ke_{1,5} & ke_{1,6} \\ ke_{2,1} & ke_{2,2} & ke_{2,3} & ke_{2,4} & ke_{2,5} & ke_{2,6} \\ ke_{3,1} & ke_{3,2} & ke_{3,3} & ke_{3,4} & ke_{3,5} & ke_{3,6} \\ ke_{4,1} & ke_{4,2} & ke_{4,3} & ke_{4,4} & ke_{4,5} & ke_{4,6} \\ ke_{5,1} & ke_{5,2} & ke_{5,3} & ke_{5,4} & ke_{5,5} & ke_{5,6} \\ ke_{6,1} & ke_{6,2} & ke_{6,3} & ke_{6,4} & ke_{6,5} & ke_{6,6} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}$$

sau în exprimare matriceală compactă (6.1.1)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

unde: $[ke]$ este matricea de rigiditate a elementului finit şaibă triunghiulară raportat la parametrii proprii $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$;

$\{d\}$ - vectorul deplasărilor extremităţilor elementului finit şaibă triunghiulară sau parametrilor proprii principali $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$;

$\{f\}$ - vectorul forţelor ce acţionează la extremităţile elementului finit şaibă triunghiulară sau parametrilor proprii secundari $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.

Componentele matricei de rigiditate ale elementului finit şaibă triunghiulară se stabilesc aplicând principiile metodei elementului finit.

Compatibilitatea deplasărilor extremităţilor elementului cu deplasările nodurilor de conectare ale structurii este asigurată.

Structurile cu elemente finite şaibă triunghiulară se pot organiza, obişnuit, după două direcţii (cazul pereţilor structurali), figura 6.2.

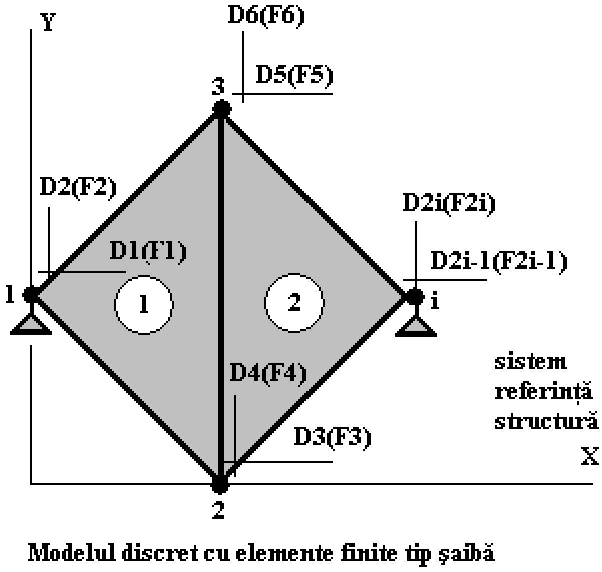


Figura 6.2 Structură continuă plană cu elemente finite şaibă triunghiulară în sistemul de axe structural *XY*

Pentru fiecare nod *i* al unei structuri plane modelabile cu elemente finite şaibă triunghiulară (cazul pereţilor structurali) se definesc câte doi parametri principali D_{2i-1} şi D_{2i}, primul fiind definit translaţie după prima axă a reperului structurii (obişnuit *X*), al doilea translaţie după cea de a doua axă a reperului structurii (obişnuit *Y*); pentru o structură cu *n* noduri se definesc *2n* parametri principali. Parametrii secundari corespunzători sunt forţele nodale F_{2i-1} şi F_{2i}; pentru o structură cu *n* noduri se definesc *2n* parametri secundari.

6.1.2 Stabilirea prin MEF - formularea directă a ecuaţiei matriceale de echilibru static - cu raportare la parametrii proprii elementului finit şaibă triunghiulară

În *MEF*, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static, raportată la parametrii proprii, pentru elementul finit şaibă triunghiulară, implică un proces de calcul etapizat:

Etapa 1.1.1. Identificarea problemei.

Fie elementul şaibă triunghiulară de grosime constantă *t*, caracterizat de modulul de elasticitate constant *E* şi coeficientul lui Poisson *v*, cu planul median în planul sistemului de referinţă propriu *xy* şi originea în extremitatea *1*, deplasările şi forţele acţionând la extremităţile sale în acest plan (figura 6.1).

Problema constă în găsirea unei relaţii, în sistemul propriu de referinţă, între vectorul parametrilor proprii principali, constituit cu deplasările extremităţilor elementului finit şaibă triunghiulară, $\{d\}$, şi vectorul parametrilor proprii secundari, constituit cu forţele corespunzătoare, $\{f\}$, de forma dată de relaţia E1.1.1.

$$[ke]\cdot\{d\}=\{f\} \tag{E1.1.1}$$

Etapa 1.1.2. Găsirea funcţiei, convenabile, de aproximare a deplasărilor în punctul curent, *d(x,y)*.

Se face ipoteza că pe toată suprafaţa elementului finit şaibă triunghiulară deplasările punctuale $d_x(x,y)$ şi $d_y(x,y)$ sunt funcţii cu variaţie liniară (polinomială) care, matriceal, sunt de forma dată de relaţia E1.1.2

$$\{d(x,y)\}=\begin{Bmatrix} d_x(x,y)=\alpha_1+\alpha_2\cdot x+\alpha_3\cdot y \\ d_y(x,y)=\alpha_4+\alpha_5\cdot x+\alpha_6\cdot y \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

sau în formă compactă, (E1.1.2)

$$\{d(x,y)\}=[\Phi(x,y)]\cdot\{\alpha\}$$

unde $[\Phi(x,y)]$ este matricea funcţiilor de aproximare;

α_i sunt coordonatele generalizate ale deplasărilor.

Etapa 1.1.3. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deplasărilor în punctul curent, *d(x,y)*, şi deplasările extremităţilor elementului finit şaibă triunghiulară, $\{d\}$.

Se face afirmaţia că relaţia E1.1.2 este valabilă inclusiv în extremităţile elementului finit şaibă triunghiulară şi aceasta se poate scrie simultan sub formă matriceală:

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} d_x(x_1,y_1) \\ d_y(x_1,y_1) \\ d_x(x_2,y_2) \\ d_y(x_2,y_2) \\ d_x(x_3,y_3) \\ d_y(x_3,y_3) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}=[A]\cdot\{\alpha\}$$

de unde rezultă:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{d\}$$

care prin înlocuire în relaţia E1.1.2 conduce la relaţia E.1.1.3

$$\{d(x,y)\} = [\Phi(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\} =$$

$$= \begin{bmatrix} N_1(x,y) & N_2(x,y) & N_3(x,y) & N_4(x,y) & N_5(x,y) & N_6(x,y) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} =$$

$$= N_1(x,y) \cdot d_1 + N_2(x,y) \cdot d_2 + N_3(x,y) \cdot d_3 + N_4(x,y) \cdot d_4 + N_5(x,y) \cdot d_5 + N_6(x,y) \cdot d_6$$

sau în formă compactă (E1.1.3)

$$\{d(x,y)\} = [N(x,y)] \cdot \{d\}$$

unde *$N_1(x,y)$, $N_2(x,y)$, $N_3(x,y)$, $N_4(x,y)$, $N_5(x,y)$, $N_6(x,y)$* sunt funcţiile de formă ale elementului finit şaibă triunghiulară.

Funcţiile de formă sunt funcţii de pondere, având proprietatea de a lua valoare maximă (unitară) în extremitatea în care acţionează parametrul principal aferent şi valoare minimă (zero) în celelalte extremităţi; suma tuturor funcţiilor de formă are valoare unitară.

În implementarea pe calculator a programelor bazate pe metoda elementului finit este importantă exprimarea funcţiei deplasărilor prin intermediul funcţiilor de formă.

Etapa 1.1.4. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deformaţiilor specifice în punctul curent, $\boldsymbol{\varepsilon(x,y)}$, şi vectorul deplasărilor extremităţilor elementului finit şaibă triunghiulară, $\{d\}$.

Se pleacă de la definirea deformaţiilor specifice pentru şaibă, relaţia E1.1.4

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x,y) = \dfrac{\partial d_x(x,y)}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x,y) = \dfrac{\partial d_y(x,y)}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial d_y(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial d_x(x,y)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$= [C] \cdot \{\alpha\} = [C] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\}$$

sau în formă compactă (E1.1.4)

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B] \cdot \{d\}$$

Etapa 1.1.5. Stabilirea relaţiei matriceale dintre componentele vectorului eforturilor în punctul curent, $\{\sigma(x,y)\}$, şi vectorului deplasărilor extremităţilor elementului finit triunghiular şaibă, $\{d\}$.

Se pleacă de la definirea stării elastice de tensiune pentru şaibă, relaţia E1.1.5:

- în cazul stării plane de tensiune

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y(x,y) \\ \sigma_{xy}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x,y) \\ \varepsilon_y(x,y) \\ \varepsilon_{xy}(x,y) \end{Bmatrix} =$$

$$= [D]\cdot\{\varepsilon(x,y)\} = [D]\cdot[B]\cdot\{d\}$$

- în cazul stării plane de deformare

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y(x,y) \\ \sigma_{xy}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x,y) \\ \varepsilon_y(x,y) \\ \varepsilon_{xy}(x,y) \end{Bmatrix} =$$

$$= [D]\cdot\{\varepsilon(x,y)\} = [D]\cdot[B]\cdot\{d\}$$

sau în formă compactă, unitară (E1.1.5)

$$\{\sigma(x,y)\} = [H]\cdot\{d\}$$

Etapa 1.1.6. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deplasărilor extremităţilor elementului finit şaibă triunghiulară, $\{d\}$ şi vectorul forţelor corespunzătoare, $\{f\}$.

Se pleacă de la definiţia lucrului mecanic virtual, exprimarea în deplasări virtuale (aplicat întregului volum al elementului finit şaibă triunghiulară), pentru cel interior:

$$L_{int} = \int_V \{\varepsilon^*(x,y)\}^T \cdot \{\sigma(x,y)\}\cdot dV =$$
$$= \int_V \left(\{d^*\}^T \cdot [B]^T\right)\cdot\left([D]\cdot[B]\cdot\{d\}\right)\cdot dV =$$
$$= \{d^*\}^T \cdot \left(t\cdot\int_A [B]^T \cdot [D]\cdot[B]\cdot dA\right)\cdot\{d\}$$

respectiv exterior:

$$L_{ext} = d_1^*\cdot f_1 + d_2^*\cdot f_2 + d_3^*\cdot f_3 + d_4^*\cdot f_4 + d_5^*\cdot f_5 + d_6^*\cdot f_6 = \{d^*\}^T\cdot\{f\}$$

şi se impune egalitatea lor pentru existenţa echilibrului static ($L_{int} = L_{ext}$).

După egalarea celor doi termeni şi efectuarea simplificărilor (considerând că nu toate deplasările virtuale sunt egale cu zero), precum şi scoaterea ca factor comun a grosimii *t*, considerată constantă pe toată suprafaţa elementului finit şaibă triunghiulară, se obţine relaţia E1.1.6

$$\left[t \cdot \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dA\right] \cdot \{d\} = \{f\}$$

sau în formă compactă (E1.1.6)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

Integralele, conţinute de relaţia E1.1.6, pot fi rezolvate fie aproximativ, prin integrări numerice după două direcţii, fie exact (şi în această situaţie este posibil), prin înlocuirea termenilor şi efectuarea operaţiilor indicate, în final obţinându-se:

$$[ke] = \Delta \cdot t \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B]$$

unde:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

În felul acesta am definit *elementul finit şaibă triunghiulară*, din categoria elementelor finite bidimensionale (*2D*).

6.2 Statica matriceală pentru analiza pereţilor structurali

6.2.1 Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static a elementului finit şaibă

Cazul structurilor modelabile cu elemente finite triunghiulare

Stabilirea ecuaţiei de echilibru static, pentru elementul finit curent *e* al unui perete structural, implică parcurgerea unui proces etapizat de calcul.

Etapa 1.1. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii proprii, cu proiecţia acestora în sistemul de referinţă propriu, *xy* (în această etapă notaţiile utilizează minuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii proprii elementului insoţite de *e* pentru indicarea apartenenţei la elementul structural curent), relaţia E1.1

$$\left[\Delta \cdot t \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B]\right] \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}$$

sau (E1.1)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

Etapa 1.2. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii structurali aferenţi elementului curent e ($De_{2i-1}, De_{2i}, De_{2j-1}, De_{2j}, De_{2k-1}, De_{2k}$, Fe^e_{2i-1}, Fe^e_{2i}, Fe^e_{2j-1}, Fe^e_{2j}, Fe^e_{2k-1}, Fe^e_{2k}), cu proiectarea acestora în sistemul de referinţă unic XY (în această etapă notaţiile utilizează majuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii structurii aferenţi elementului e iar e-indice superior pentru fracţiunea de participare a elementului curent la ansamblul structural), relaţia E1.2,

$$\begin{bmatrix} Ke_{1,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,3} & Ke_{1,4} & Ke_{1,5} & Ke_{1,6} \\ Ke_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,3} & Ke_{3,4} & Ke_{2,5} & Ke_{2,6} \\ Ke_{3,1} & Ke_{3,2} & Ke_{3,3} & Ke_{3,4} & Ke_{3,5} & Ke_{3,6} \\ Ke_{4,1} & Ke_{4,2} & Ke_{4,3} & Ke_{4,4} & Ke_{4,5} & Ke_{4,6} \\ Ke_{5,1} & Ke_{5,2} & Ke_{5,3} & Ke_{5,4} & Ke_{5,5} & Ke_{5,6} \\ Ke_{6,1} & Ke_{6,2} & Ke_{6,3} & Ke_{6,4} & Ke_{6,5} & Ke_{6,6} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} De_{2i-1} \\ De_{2i} \\ De_{2j-1} \\ De_{2j} \\ De_{2k-1} \\ De_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fe^e_{2i-1} \\ F^e_{2i} \\ Fe^e_{2j-1} \\ Fe^e_{2j} \\ Fe^e_{2k-1} \\ Fe^e_{2k} \end{Bmatrix}$$

sau (E1.2)

$$[Ke] \cdot \{De\} = \{Fe^e\}$$

Parametrii proprii ai extremităţilor elementului finit şaibă triunghiulară sunt proiectaţi pe direcţiile parametrilor structurali aferenţi ai nodurilor de conectare, cu ajutorul matricei de transformare prin rotire, T, care are ca elemente componente cosinuşii directori ai axelor proprii (x şi y) definiţi funcţie de reperul structurii (XY). În acest caz matricea de transformare prin rotire este de forma:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

unde α este unghiul măsurat, în sens pozitiv, de la axa de referinţă X către axa de referinţă x (antiorar).

Matricea T este o matrice ortogonală şi are proprietatea că inversa este egală cu transpusa:

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

Relaţiile de legătură dintre parametrii proprii şi parametrii structurali aferenţi sunt:

$$\{d\} = [T] \cdot \{De\} \qquad\qquad \{f\} = [T] \cdot \{Fe^e\}$$

care, înlocuite în relaţia E1.1 şi operat corespunzător, conduc la stabilirea matricei de rigiditate a elementului finit şaibă triunghiulară raportată la parametrii structurali aferenţi:

$$[Ke] = [T]^T \cdot [ke] \cdot [T]$$

Etapa 1.3. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii structurii, completând cu ecuaţii fictive corespunzătoare parametrilor structurii ce nu sunt aferenţi sau nu aparţin elementului finit şaibă triunghiulară (în această etapă notaţiile utilizează majuscule sau indici referitori la apartenenţa la elementul finit curent):

$$\begin{bmatrix} K^e_{1,1} & . & . & . & K^e_{1,2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ K^e_{2n,1} & . & . & . & K^e_{2n,2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ . \\ . \\ . \\ D_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^e_1 \\ . \\ . \\ . \\ F^e_{2n} \end{Bmatrix}$$

sau (E1.3)

$$[K^e] \cdot \{D\} = \{F^e\}$$

unde: $[K^e]$ este matricea de rigiditate a elementului finit şaibă triunghiulară raportată la parametrii structurali.

$\{D\}$ - vectorul deplasărilor nodurilor structurii sau parametrilor principali ai structurii $D_1 \ldots D_{2n}$;

$\{F^e\}$ - fracţiunea vectorului forţelor nodurilor structurii sau parametrilor secundari ai structurii $F^e_1 \ldots \boldsymbol{F^e_{2n}}$ corespunzând elementului finit curent *e*.

6.2.2 Analiza statică a peretelui structural

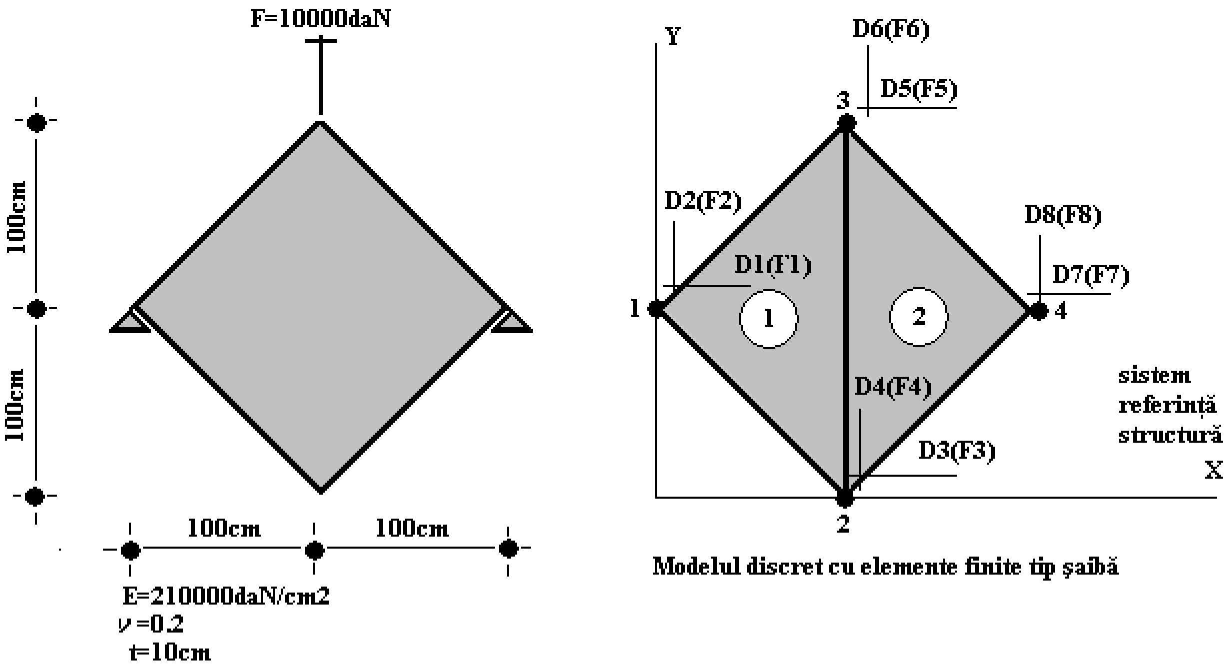
Enunţarea problemei: Să se efectueze analiza statică a peretelui structural modelat cu elemente finite tip şaibă triunghiulară aflată în stare plană de tensiune (determinarea deplasărilor nodurilor, forţelor din reazeme şi tensiunilor din elementele finite), schema statică, caracteristicile geometrice şi mecanice, precum şi încărcările fiind precizate pe figura 6.2.

Rezolvarea problemei:

Exceptând modul în care este stabilită ecuaţia de echilibru static a elementului finit şaibă triunghiulară raportată la parametrii proprii, *Etapa 1.1,* restul etapelor de calcul pentru rezolvarea problemei, urmăresc procesul etapizat, al metodei staticii matriceale clasice, pentru analiza structurilor cu bare.

Aplicaţia utilizează notaţii pentru variabile şi operatori specifice programului de calcul matematic Mathcad (simbolul := are înţelesul de atribuire).

Sistemul de referinţă propriu este ales acelaşi pentru toate elementele finite şi identic cu sistemul de referinţă al întregii structuri.



$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad DE := \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Figura 6.2 Peretele structural şi modelul discret cu elemente finite tip şaibă triunghiulară în stare plană de tensiune

Etapa 1, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static pentru fiecare şaibă triunghiulară.

Elementul finit şaibă 1 (figura 6.3.1)

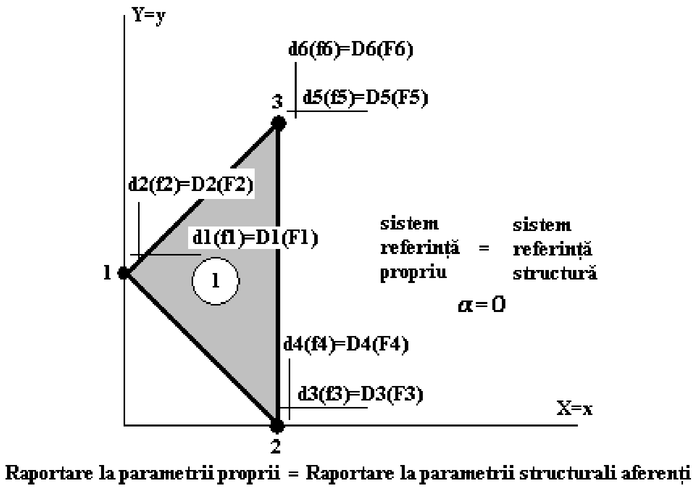


Figura 6.3.1 Parametrii şi sistemele de referinţă pentru elementul finit şaibă 1

$Nex1 := 1$	$x1 := 0$	$y1 := 100$	$Dex1 := 2 \cdot Nex1 - 1$	$Dex2 := 2 \cdot Nex1$
$Nex2 := 2$	$x2 := 100$	$y2 := 0$	$Dex3 := 2 \cdot Nex2 - 1$	$Dex4 := 2 \cdot Nex2$
$Nex3 := 3$	$x3 := 100$	$y3 := 200$	$Dex5 := 2 \cdot Nex3 - 1$	$Dex6 := 2 \cdot Nex3$

unde *Nex1, ..., Nex3* sunt indecşii nodurilor corespunzând extremităţilor elementului finit;
x1, y1, …, x3, y3 - coordonatele extremităţilor elementului finit;
Dex1, ..., Dex1 - indecşii deplasărilor din nodurile corespunzătoare extremităţilor elementului finit.

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii

$$A1 := \begin{pmatrix} 1 & x1 & y1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x1 & y1 \\ 1 & x2 & y2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x2 & y2 \\ 1 & x3 & y3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x3 & y3 \end{pmatrix} \qquad B1 := C \cdot A1^{-1} \qquad AUX1 := \begin{pmatrix} 1 & x1 & y1 \\ 1 & x2 & y2 \\ 1 & x3 & y3 \end{pmatrix} \qquad \Delta 1 := \frac{1}{2} \cdot |AUX1|$$

$$ke1 := \Delta 1 \cdot t \cdot \left(B1^{T} \cdot DE \cdot B1\right)$$

$$ke1 = \begin{pmatrix} 2.188\times 10^{6} & 0 & -1.094\times 10^{6} & 2.188\times 10^{5} & -1.094\times 10^{6} & -2.188\times 10^{5} \\ 0 & 8.75\times 10^{5} & 4.375\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} \\ -1.094\times 10^{6} & 4.375\times 10^{5} & 7.656\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} & 3.281\times 10^{5} & -1.094\times 10^{5} \\ 2.188\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} & 7.656\times 10^{5} & 1.094\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} \\ -1.094\times 10^{6} & -4.375\times 10^{5} & 3.281\times 10^{5} & 1.094\times 10^{5} & 7.656\times 10^{5} & 3.281\times 10^{5} \\ -2.188\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} & -1.094\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} & 3.281\times 10^{5} & 7.656\times 10^{5} \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi

$$\alpha := 0 \qquad T1 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$k1 := T1^{T} \cdot ke1 \cdot T1$$

$$k1 = \begin{pmatrix} 2.188\times10^{6} & 0 & -1.094\times10^{6} & 2.188\times10^{5} & -1.094\times10^{6} & -2.188\times10^{5} \\ 0 & 8.75\times10^{5} & 4.375\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -4.375\times10^{5} \\ -1.094\times10^{6} & 4.375\times10^{5} & 7.656\times10^{5} & -3.281\times10^{5} & 3.281\times10^{5} & -1.094\times10^{5} \\ 2.188\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -3.281\times10^{5} & 7.656\times10^{5} & 1.094\times10^{5} & -3.281\times10^{5} \\ -1.094\times10^{6} & -4.375\times10^{5} & 3.281\times10^{5} & 1.094\times10^{5} & 7.656\times10^{5} & 3.281\times10^{5} \\ -2.188\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -1.094\times10^{5} & -3.281\times10^{5} & 3.281\times10^{5} & 7.656\times10^{5} \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurali

$$i := 1..8 \qquad j := 1..8 \qquad K1_{i,j} := 0$$

$$K1_{Dex1,Dex1} := k1_{1,1} \; K1_{Dex1,Dex2} := k1_{1,2} \; K1_{Dex1,Dex3} := k1_{1,3}$$
$$K1_{Dex1,Dex4} := k1_{1,4} \; K1_{Dex1,Dex5} := k1_{1,5} \; K1_{Dex1,Dex6} := k1_{1,6}$$

$$K1_{Dex2,Dex1} := k1_{2,1} \; K1_{Dex2,Dex2} := k1_{2,2} \; K1_{Dex2,Dex3} := k1_{2,3}$$
$$K1_{Dex2,Dex4} := k1_{2,4} \; K1_{Dex2,Dex5} := k1_{2,5} \; K1_{Dex2,Dex6} := k1_{2,6}$$

$$K1_{Dex3,Dex1} := k1_{3,1} \; K1_{Dex3,Dex2} := k1_{3,2} \; K1_{Dex3,Dex3} := k1_{3,3}$$
$$K1_{Dex3,Dex4} := k1_{3,4} \; K1_{Dex3,Dex5} := k1_{3,5} \; K1_{Dex3,Dex6} := k1_{3,6}$$

$$K1_{Dex4,Dex1} := k1_{4,1} \; K1_{Dex4,Dex2} := k1_{4,2} \; K1_{Dex4,Dex3} := k1_{4,3}$$
$$K1_{Dex4,Dex4} := k1_{4,4} \; K1_{Dex4,Dex5} := k1_{4,5} \; K1_{Dex4,Dex6} := k1_{4,6}$$

$$K1_{Dex5,Dex1} := k1_{5,1} \; K1_{Dex5,Dex2} := k1_{5,2} \; K1_{Dex5,Dex3} := k1_{5,3}$$
$$K1_{Dex5,Dex4} := k1_{5,4} \; K1_{Dex5,Dex5} := k1_{5,5} \; K1_{Dex5,Dex6} := k1_{5,6}$$

$$K1_{Dex6,Dex1} := k1_{6,1} \; K1_{Dex6,Dex2} := k1_{6,2} \; K1_{Dex6,Dex3} := k1_{6,3}$$
$$K1_{Dex6,Dex4} := k1_{6,4} \; K1_{Dex6,Dex5} := k1_{6,5} \; K1_{Dex6,Dex6} := k1_{6,6}$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 2.188\times10^{6} & 0 & -1.094\times10^{6} & 2.188\times10^{5} & -1.094\times10^{6} & -2.188\times10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & 8.75\times10^{5} & 4.375\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & 0 & 0 \\ -1.094\times10^{6} & 4.375\times10^{5} & 7.656\times10^{5} & -3.281\times10^{5} & 3.281\times10^{5} & -1.094\times10^{5} & 0 & 0 \\ 2.188\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -3.281\times10^{5} & 7.656\times10^{5} & 1.094\times10^{5} & -3.281\times10^{5} & 0 & 0 \\ -1.094\times10^{6} & -4.375\times10^{5} & 3.281\times10^{5} & 1.094\times10^{5} & 7.656\times10^{5} & 3.281\times10^{5} & 0 & 0 \\ -2.188\times10^{5} & -4.375\times10^{5} & -1.094\times10^{5} & -3.281\times10^{5} & 3.281\times10^{5} & 7.656\times10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementul finit şaibă 2 (figura 6.3.2)

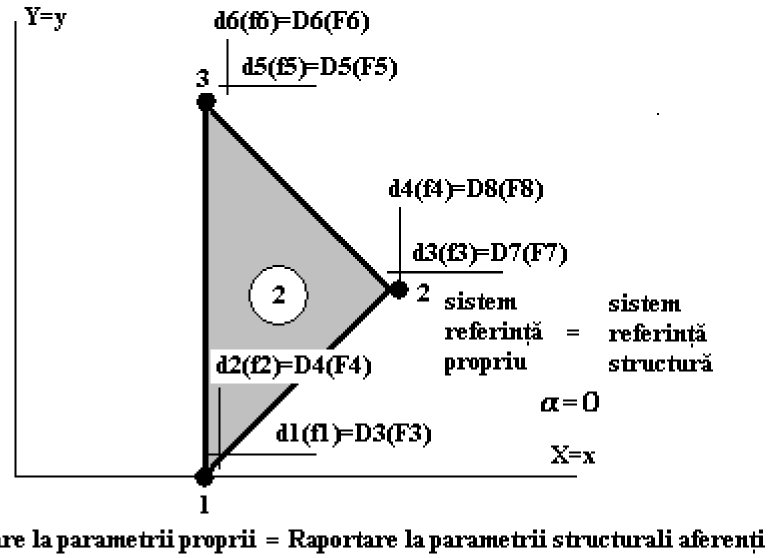


Figura 6.3.2 Parametri şi sisteme de referinţă pentru elementul finit şaibă 2

$$\begin{array}{lllll}
Nex1 := 2 & x1 := 100 & y1 := 0 & Dex1 := 2\cdot Nex1 - 1 & Dex2 := 2\cdot Nex1 \\
Nex2 := 4 & x2 := 200 & y2 := 100 & Dex3 := 2\cdot Nex2 - 1 & Dex4 := 2\cdot Nex2 \\
Nex3 := 3 & x3 := 100 & y3 := 200 & Dex5 := 2\cdot Nex3 - 1 & Dex6 := 2\cdot Nex3
\end{array}$$

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii

$$A2 := \begin{pmatrix} 1 & x1 & y1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x1 & y1 \\ 1 & x2 & y2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x2 & y2 \\ 1 & x3 & y3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x3 & y3 \end{pmatrix} \qquad B2 := C\cdot A2^{-1} \qquad AUX2 := \begin{pmatrix} 1 & x1 & y1 \\ 1 & x2 & y2 \\ 1 & x3 & y3 \end{pmatrix} \qquad \Delta 2 := \frac{1}{2}\cdot |AUX2|$$

$$ke2 := \Delta 2\cdot t\cdot \left(B2^{T}\cdot DE\cdot B2\right)$$

$$ke2 = \begin{pmatrix}
7.656\times 10^{5} & 3.281\times 10^{5} & -1.094\times 10^{6} & -4.375\times 10^{5} & 3.281\times 10^{5} & 1.094\times 10^{5} \\
3.281\times 10^{5} & 7.656\times 10^{5} & -2.188\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} & -1.094\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} \\
-1.094\times 10^{6} & -2.188\times 10^{5} & 2.188\times 10^{6} & 0 & -1.094\times 10^{6} & 2.188\times 10^{5} \\
-4.375\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} & 0 & 8.75\times 10^{5} & 4.375\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} \\
3.281\times 10^{5} & -1.094\times 10^{5} & -1.094\times 10^{6} & 4.375\times 10^{5} & 7.656\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} \\
1.094\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} & 2.188\times 10^{5} & -4.375\times 10^{5} & -3.281\times 10^{5} & 7.656\times 10^{5}
\end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi

$$\alpha := 0 \qquad T2 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$k2 := T2^T \cdot ke2 \cdot T2$$

$$k2 = \begin{pmatrix} 7.656\times 10^5 & 3.281\times 10^5 & -1.094\times 10^6 & -4.375\times 10^5 & 3.281\times 10^5 & 1.094\times 10^5 \\ 3.281\times 10^5 & 7.656\times 10^5 & -2.188\times 10^5 & -4.375\times 10^5 & -1.094\times 10^5 & -3.281\times 10^5 \\ -1.094\times 10^6 & -2.188\times 10^5 & 2.188\times 10^6 & 0 & -1.094\times 10^6 & 2.188\times 10^5 \\ -4.375\times 10^5 & -4.375\times 10^5 & 0 & 8.75\times 10^5 & 4.375\times 10^5 & -4.375\times 10^5 \\ 3.281\times 10^5 & -1.094\times 10^5 & -1.094\times 10^6 & 4.375\times 10^5 & 7.656\times 10^5 & -3.281\times 10^5 \\ 1.094\times 10^5 & -3.281\times 10^5 & 2.188\times 10^5 & -4.375\times 10^5 & -3.281\times 10^5 & 7.656\times 10^5 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurali

$$i := 1..8 \qquad j := 1..8 \qquad K2_{i,j} := 0$$

$$K2_{Dex1,Dex1} := k2_{1,1} \quad K2_{Dex1,Dex2} := k2_{1,2} \quad K2_{Dex1,Dex3} := k2_{1,3}$$
$$K2_{Dex1,Dex4} := k2_{1,4} \quad K2_{Dex1,Dex5} := k2_{1,5} \quad K2_{Dex1,Dex6} := k2_{1,6}$$

$$K2_{Dex2,Dex1} := k2_{2,1} \quad K2_{Dex2,Dex2} := k2_{2,2} \quad K2_{Dex2,Dex3} := k2_{2,3}$$
$$K2_{Dex2,Dex4} := k2_{2,4} \quad K2_{Dex2,Dex5} := k2_{2,5} \quad K2_{Dex2,Dex6} := k2_{2,6}$$

$$K2_{Dex3,Dex1} := k2_{3,1} \quad K2_{Dex3,Dex2} := k2_{3,2} \quad K2_{Dex3,Dex3} := k2_{3,3}$$
$$K2_{Dex3,Dex4} := k2_{3,4} \quad K2_{Dex3,Dex5} := k2_{3,5} \quad K2_{Dex3,Dex6} := k2_{3,6}$$

$$K2_{Dex4,Dex1} := k2_{4,1} \quad K2_{Dex4,Dex2} := k2_{4,2} \quad K2_{Dex4,Dex3} := k2_{4,3}$$
$$K2_{Dex4,Dex4} := k2_{4,4} \quad K2_{Dex4,Dex5} := k2_{4,5} \quad K2_{Dex4,Dex6} := k2_{4,6}$$

$$K2_{Dex5,Dex1} := k2_{5,1} \quad K2_{Dex5,Dex2} := k2_{5,2} \quad K2_{Dex5,Dex3} := k2_{5,3}$$
$$K2_{Dex5,Dex4} := k2_{5,4} \quad K2_{Dex5,Dex5} := k2_{5,5} \quad K2_{Dex5,Dex6} := k2_{5,6}$$

$$K2_{Dex6,Dex1} := k2_{6,1} \quad K2_{Dex6,Dex2} := k2_{6,2} \quad K2_{Dex6,Dex3} := k2_{6,3}$$
$$K2_{Dex6,Dex4} := k2_{6,4} \quad K2_{Dex6,Dex5} := k2_{6,5} \quad K2_{Dex6,Dex6} := k2_{6,6}$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.656\times 10^5 & 3.281\times 10^5 & 3.281\times 10^5 & 1.094\times 10^5 & -1.094\times 10^6 & -4.375\times 10^5 \\ 0 & 0 & 3.281\times 10^5 & 7.656\times 10^5 & -1.094\times 10^5 & -3.281\times 10^5 & -2.188\times 10^5 & -4.375\times 10^5 \\ 0 & 0 & 3.281\times 10^5 & -1.094\times 10^5 & 7.656\times 10^5 & -3.281\times 10^5 & -1.094\times 10^6 & 4.375\times 10^5 \\ 0 & 0 & 1.094\times 10^5 & -3.281\times 10^5 & -3.281\times 10^5 & 7.656\times 10^5 & 2.188\times 10^5 & -4.375\times 10^5 \\ 0 & 0 & -1.094\times 10^6 & -2.188\times 10^5 & -1.094\times 10^6 & 2.188\times 10^5 & 2.188\times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -4.375\times 10^5 & -4.375\times 10^5 & 4.375\times 10^5 & -4.375\times 10^5 & 0 & 8.75\times 10^5 \end{pmatrix}$$

Etapa 2, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static a structurii:

$$K := K1 + K2$$

$$K = \begin{pmatrix} 2187500 & 0 & -1093750 & 218750 & -1093750 & -218750 & 0 & 0 \\ 0 & 875000 & 437500 & -437500 & -437500 & -437500 & 0 & 0 \\ -1093750 & 437500 & 1531250 & 0 & 656250 & 0 & -1093750 & -437500 \\ 218750 & -437500 & 0 & 1531250 & 0 & -656250 & -218750 & -437500 \\ -1093750 & -437500 & 656250 & 0 & 1531250 & 0 & -1093750 & 437500 \\ -218750 & -437500 & 0 & -656250 & 0 & 1531250 & 218750 & -437500 \\ 0 & 0 & -1093750 & -218750 & -1093750 & 218750 & 2187500 & 0 \\ 0 & 0 & -437500 & -437500 & 437500 & -437500 & 0 & 875000 \end{pmatrix} \qquad |K| = 0$$

Etapa 3, introducerea condiţiilor la limită (cl):

$$Kcl := \begin{pmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} \\ K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} \\ K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} \end{pmatrix} \qquad Kcl = \begin{pmatrix} 1531250 & 0 & 656250 & 0 \\ 0 & 1531250 & 0 & -656250 \\ 656250 & 0 & 1531250 & 0 \\ 0 & -656250 & 0 & 1531250 \end{pmatrix}$$

$$|Kcl| = 366363525390625050000000$$

$$Fcl := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \end{pmatrix}$$

Etapa 4, determinarea deplasărilor necunoscute (nec):

$$Dnec := lsolve(Kcl, Fcl) \qquad Dnec = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.003 \\ 0 \\ -0.008 \end{pmatrix}$$

- generarea vectorului deplasărilor:

$$D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Dnec_1 \\ Dnec_2 \\ Dnec_3 \\ Dnec_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.003 \\ 0 \\ -0.008 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 5 (auxiliară), determinarea forţelor din reazeme:

$$Fnec1 := K^{\langle 1 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec1 = \left(1 \times 10^3\right) \qquad Fnec2 := K^{\langle 2 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec2 = (5000)$$

$$Fnec7 := K^{\langle 7 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec7 = \left(-1 \times 10^3\right) \qquad Fnec8 := K^{\langle 8 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec8 = (5000)$$

- generarea vectorului forţelor:

$$F := \begin{pmatrix} Fnec1_1 \\ Fnec2_1 \\ Fcl_1 \\ Fcl_2 \\ Fcl_3 \\ Fcl_4 \\ Fnec7_1 \\ Fnec8_1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1000 \\ 5000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ -1000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

Etapa 6 (auxiliară), determinarea tensiunilor din elementele finite:

Elementul finit şaibă 1

$$D1 := \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} \qquad \sigma e1 := DE \cdot B1 \cdot T1 \cdot D1 \qquad \sigma e1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Elementul finit şaibă 2

$$D2 := \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} \qquad \sigma e2 := DE \cdot B2 \cdot T2 \cdot D2 \qquad \sigma e2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$